TME²

SEDUC OLÍMPICA

2º TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

1ª Fase

Ensino Médio

06 de maio de 2024

Dia Nacional da Matemática

NOME COMPLETO DO(A) ALUNO(A)

INSTRUÇÕES:

1. A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos. Você só poderá deixar a sala 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a juntamente com o cartão-resposta preenchido ao aplicador.

2. Não é permitido:
   - usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
   - comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
   - usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

3. Esta prova contém 20 problemas. Os problemas têm pesos diferentes:

Problemas	Pontuação individual	Pontuação total
01 a 05	01	5
06 a 10	03	15
11 a 15	05	25
16 a 20	07	35

4. Cada problema tem cinco alternativas de resposta: A, B, C, D e E. **Apenas uma** das alternativas é correta.

5. **Respostas incorretas, rasuradas ou com múltiplas opções assinaladas sofrerão uma penalidade correspondente à perda de 25% do valor atribuído ao problema. No cálculo da pontuação final, serão considerados tanto os pesos das questões quanto as eventuais penalizações aplicadas.**

6. A fim de evitar pontuações negativas a nota final será acrescida em 20 pontos.

7. A pontuação final máxima da prova, levando em conta os pesos atribuídos às questões corretas e as penalidades por respostas erradas, equivale a 100 pontos.

Boa prova!

APOIO:

FAPEPI

FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DO PIAUÍ

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ

AQUI TEM TRABALHO. AQUI TEM FUTURO.

Problemas de 01 Ponto

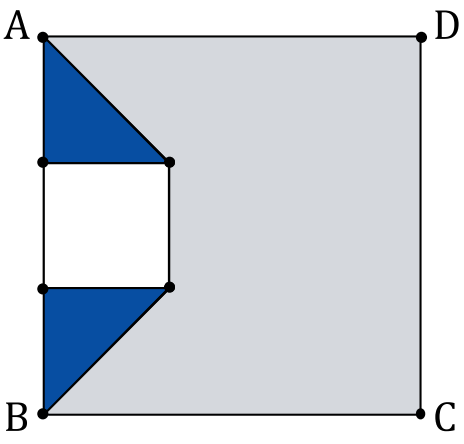
Problema 01

Se $x + 3 = 11$ qual é o valor de $2x + 6$?

- (A) 12
- (B) 16
- (C) 18
- (D) 20
- (E) 22

Problema 02

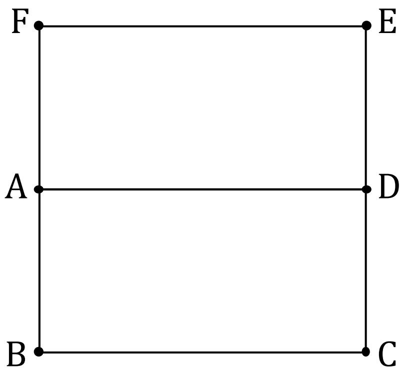
Qual é a área do quadrado ABCD, em que estão destacados um quadrado branco de lado medindo 2 cm e dois triângulos isósceles congruentes?



- (A) 36 cm^2
- (B) 28 cm^2
- (C) 24 cm^2
- (D) 6 cm^2
- (E) 4 cm^2

Problema 03

Duas pessoas, Helena e Gláucia, partem juntas do ponto A em uma trilha quadrada repartida em dois retângulos iguais. Helena segue sempre o caminho ABCDEFA, enquanto Gláucia, que sai em sentido ao vértice D, percorre sempre o caminho ADCBA.



Supondo que elas mantiveram as mesmas velocidades de caminhada, sem contar o momento em que partiram juntas, elas voltaram a se encontrar **pela segunda vez** exatamente

- (A) no ponto C.
- (B) no ponto F.
- (C) entre os pontos E e F.
- (D) no ponto médio do segmento AD.
- (E) no ponto médio do segmento BC.

Problema 04

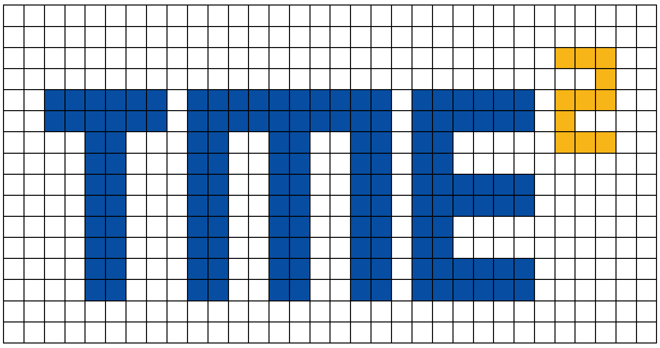
Durante o lanche, os irmãos B1 e B2 compartilharam uma garrafa de refrigerante de 1,5 litro. Após algum tempo, observaram que o volume de refrigerante na garrafa estava pela metade.

Considerando essa observação como correta, qual era a fração de refrigerante restante na garrafa, expresso em litro (L)?

- (A) $\frac{2}{4}$ L
- (B) $\frac{3}{4}$ L
- (C) $\frac{2}{3}$ L
- (D) 1 L
- (E) $\frac{5}{4}$ L

Problema 05

Na malha quadriculada abaixo foram desenhadas as letras **T**, **M**, **E** e o numeral **2**.



Sabendo-se que o perímetro do polígono que representa o numeral 2 na figura é igual a 12, a soma dos perímetros das 3 figuras que representam as letras, é

- (A) 76.
- (B) 88.
- (C) 140.
- (D) 152.
- (E) 176.

Problemas de 03 Pontos

Problema 06

Considere a expressão $3^2 - \sqrt{9}$.

O resultado desta operação pode ser interpretado como

- (A) o perímetro do retângulo cujos lados medem $3 + \sqrt{3}$ e $3 - \sqrt{3}$.
- (B) a medida da área do quadrado de lado igual a $3\sqrt{2}$.
- (C) a medida da área da região circular inscrita no quadrado de lado igual a 3.
- (D) a medida do cateto desconhecido em um triângulo retângulo, no qual a hipotenusa mede 3 e o outro cateto também mede 3.
- (E) a medida de um dos catetos do triângulo retângulo, no qual a hipotenusa mede 3 e o outro cateto mede $\sqrt{3}$.

Problema 07

Antônio enfrenta um desafio matemático proposto por sua professora: determinar o valor de $a^4 + b^4$ para números reais a e b que obedecem às condições $a^2 + b^2 = 1$ e $ab = \frac{1}{2}$. Ele recorda uma lição sobre produtos notáveis, que indica que a expressão:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2.$$

Com base nessas informações, qual será o resultado da expressão?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) $\frac{3}{4}$
- (D) $\frac{5}{4}$
- (E) $\frac{17}{16}$

Problema 08

No Clube do Livro da Escola Malba Tahan, descobre-se que:

I) Quem prefere romances não gosta de livros de mistério.

II) Aqueles que gostam de poesia sempre apreciam romances, mas nem todos que gostam de romances apreciam poesia.

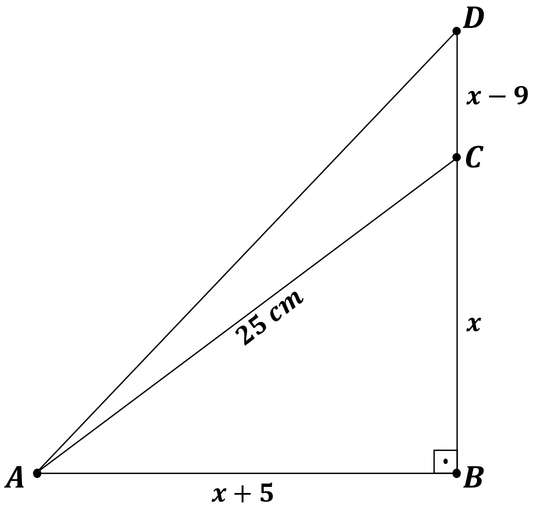
III) Ninguém no clube gosta de todos os três gêneros: romances, mistérios e poesia.

Com base nessas informações, se Laura prefere romances, e João detesta poesia, o que podemos dizer sobre as preferências deles?

- (A) Laura gosta de romances e mistérios, mas não de poesia; João gosta apenas de mistérios.
- (B) Laura gosta de romances; João não gosta de poesia e não é possível determinar suas outras preferências.
- (C) Laura gosta de romances e poesia, mas não de mistérios; João gosta de romances, mas não de poesia nem de mistérios.
- (D) Laura gosta de romances, mas não de mistérios; João gosta de mistérios, mas não de romances nem de poesia.
- (E) Laura gosta de poesia e romances; João gosta de mistérios e romances.

Problema 09

Na figura abaixo, temos os triângulos ABC e ABD retângulos em B.



Considerando que as medidas dos lados AC, AB, BC e CD são, respectivamente, $25\ cm$, $x+5$, x e $x-9$, temos que a medida do lado AD é

- **A** $20\sqrt{2}\ cm.$
- **B** $25\sqrt{2}\ cm.$
- **C** $29\ cm.$
- **D** $29\sqrt{2}\ cm.$
- **E** $31\ cm.$

Problema 10

Para comemorar o Dia Nacional da Matemática, um professor planeja realizar uma dinâmica com seus alunos. Ele irá levar uma urna com 10 bolinhas numeradas de 01 a 10. Cada aluno irá retirar uma única bolinha, mostrar o seu número e devolver a bolinha para a urna. Os primeiros 3 alunos que retirarem o mesmo número, ganharão um prêmio.

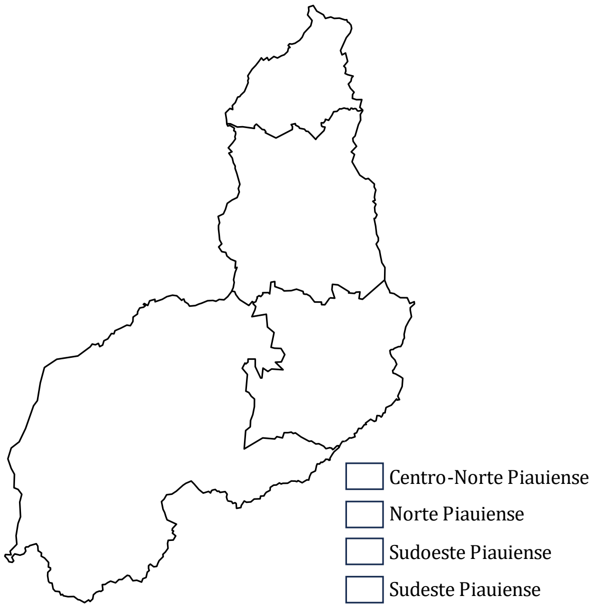
A quantidade mínima de alunos para realizar essa dinâmica, de modo que se garanta 3 alunos retirando o mesmo número é

- **A** 3.
- **B** 13.
- **C** 20.
- **D** 21.
- **E** 30.

Problemas de 05 Pontos

Problema 11

Ana Carla desafiou seus alunos a colorir o mapa das mesorregiões do Piauí utilizando as cores azul, amarela, laranja e verde, de tal forma que regiões adjacentes não compartilhassem a mesma cor.

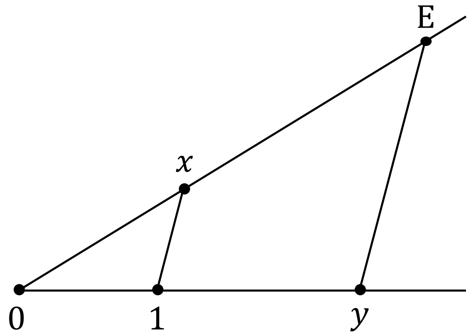


De quantas maneiras diferentes os alunos podem pintar esse mapa?

- **A** 256
- **B** 144
- **C** 72
- **D** 24
- **E** 16

Problema 12

A figura ilustra a interpretação geométrica de uma operação matemática fundamental envolvendo números reais. Essa construção geométrica origina-se do ponto de intersecção de duas semirretas, que compartilham a mesma origem, com dois segmentos de reta paralelos entre si. Neste contexto específico, consideramos x e y como números reais positivos.



A operação mencionada no texto acima

- **A** se refere à soma, sendo $\mathrm{E} = x + y$.
- **B** se refere ao produto, sendo $\mathrm{E} = xy$.
- **C** se refere à subtração, sendo $\mathrm{E} = x - y$.
- **D** se refere à divisão, sendo $\mathrm{E} = x \div y$.
- **E** se refere à raiz quadrada, sendo $\mathrm{E} = \sqrt{xy}$.

Problema 13

Sendo n um número natural par e m um número natural ímpar, observe as expressões abaixo:

I. $3n + m$
II. $n^2 + m^2$
III. $n^2 + 2m$
IV. $m^2 + 2n$

Sobre essas expressões podemos afirmar que

- **A** apenas I e IV representam números ímpares.
- **B** apenas I representa um número ímpar.
- **C** apenas III representa um número par.
- **D** apenas IV representa um número par.
- **E** todas representam números ímpares.

Problema 14

Um ciclista viaja de uma cidade A para uma cidade B, uma distância de 90 km, com uma velocidade média de 30 km/h. Na volta, devido ao vento a favor, sua velocidade média aumenta para 45 km/h.

Desprezando o tempo de parada na cidade B, qual é a velocidade média do ciclista para o percurso total de ida e volta?

- **A** 40,0 km/h
- **B** 38,0 km/h
- **C** 37,5 km/h
- **D** 36,0 km/h
- **E** 34,5 km/h

Problema 15

Você tem dois dados convencionais, um azul e outro verde. Quando você lança esses dados, cada um mostra um resultado que varia de 1 a 6, formando um par ordenado (x, y) que representa os resultados desses dois lançamentos.

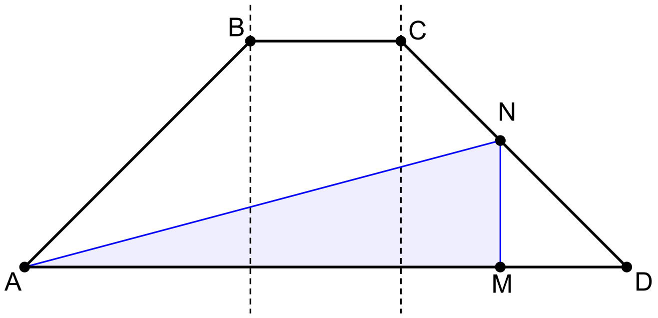
Quantas combinações possíveis de resultados dos lançamentos, juntando-se ao número 3, representam as medidas dos lados de um triângulo?

- **A** 8
- **B** 13
- **C** 16
- **D** 21
- **E** 36

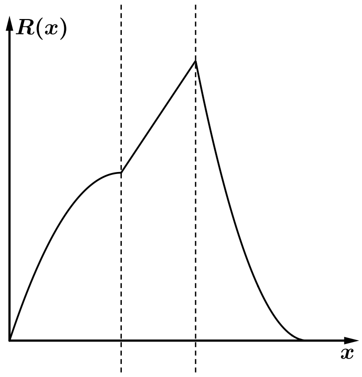
Problemas de 07 Pontos

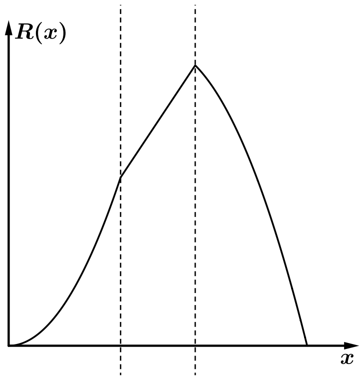
Problema 16

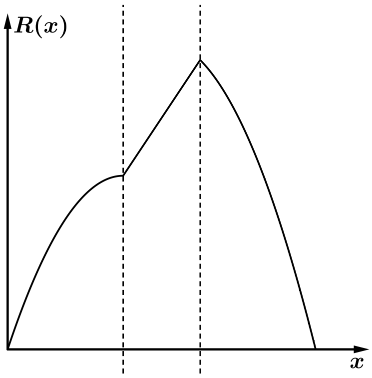
No trapézio ABCD, os pontos M e N movem-se a partir do ponto A, respectivamente sobre o segmento AD e sobre a linha poligonal ABCD, de modo que o segmento MN permaneça perpendicular às bases do trapézio.

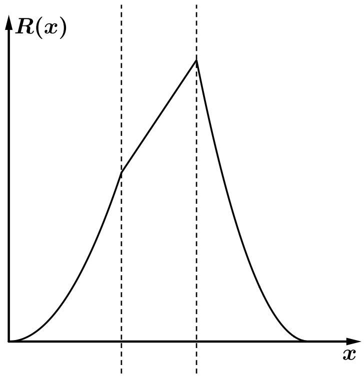


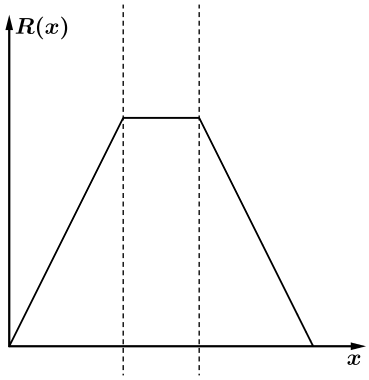
Qual é o gráfico que melhor representa a área R(x) do triângulo AMN em função da distância x do ponto M ao ponto A?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Problema 17

Em um jogo entre dois jogadores, Ana e Bruno, cada um escolhe um dado para jogar. Ana escolhe um dado de 6 lados, numerados de 1 a 6. Bruno, por outro lado, escolhe um dado especial de 8 lados, numerado de 1 a 8. Eles concordam que o vencedor da rodada é quem tirar o número mais alto no lançamento do dado. Em caso de empate, a rodada é considerada um empate.

Qual é a probabilidade de Ana vencer uma rodada, considerando que ambos lançam seus dados uma vez?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{5}{8}$

(C) $\frac{5}{18}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{5}{16}$

Problema 18

Dizemos que um tabuleiro 2 x 3 é elegante se for possível colocar um dígito (de 0 a 9) em cada uma de suas casas de modo que:

- Ao ler os dígitos na direção horizontal, da esquerda para a direita, a soma dos dois números formados é igual a 999.
- Ao ler os dígitos na direção vertical de cima para baixo, os três números formados somam 99.

Por exemplo, o tabuleiro abaixo é elegante, pois $8 + 991 = 999$ e $9 + 9 + 81 = 99$.

0	0	8
9	9	1

Quantos tabuleiros 2×3 elegantes existem?

(A) 32

(B) 36

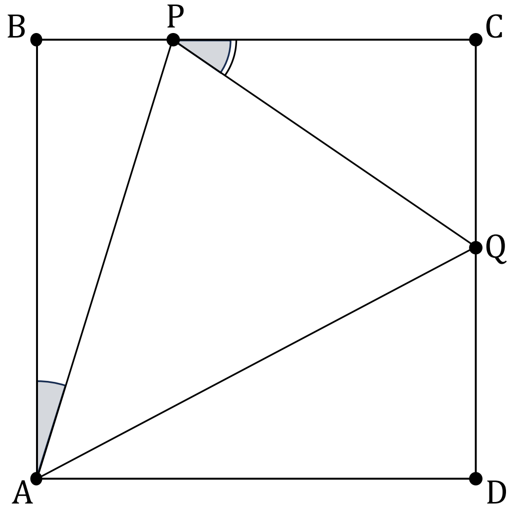
(C) 45

(D) 72

(E) 90

Problema 19

Considere a figura plana dada, na qual ABCD representa um quadrado. Nesta figura, os pontos P e Q são localizados nos lados BC e CD, respectivamente. É dado que o ângulo QPC é o dobro do ângulo BAP.



Sabendo que o lado do quadrado tem comprimento de 8 unidades, determine o perímetro do triângulo PCQ.

(A) 4

(B) 8

(C) 16

(D) 24

(E) 32

Problema 20

Seja X o menor número natural com a propriedade de que, ao inserir qualquer algarismo não nulo c após o último algarismo de X (ou seja, à direita de X), o número resultante é sempre divisível por c.

Qual é a soma dos algarismos de X?

(A) 15

(B) 14

(C) 12

(D) 9

(E) 6