SEDUC OLÍMPICA

TME²

3º TORNEIO DE MATEMÁTICA
DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

1ª Fase
Ensino Médio

GABARITO OFICIAL E RESOLUÇÃO COMENTADA

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ
AQUI TEM TRABALHO. AQUI TEM FUTURO.

Problema 01 (E)

Todos os oito retângulos apresentados estão divididos em **quartos**, isto é, em **quatro partes de áreas iguais**. Em alguns casos, embora as regiões não sejam congruentes, é possível justificar com clareza que a partição preserva a igualdade de área.

Por exemplo, no último retângulo da primeira linha, um segmento horizontal divide o retângulo em duas metades, e cada metade foi subdividida de maneira estratégica em duas regiões com mesma área, garantindo a divisão total em quatro partes de áreas iguais.

Problema 02 (B)

Cada dobra, dobra o número de camadas → sequência de potências de 2:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8, 2^4 = 16,\ 2^5 = 32$$

Problema 03 (C)

A balança está em equilíbrio. Isso significa que o peso total de cada lado é o mesmo.

No **lado esquerdo**, temos:

- 2 bolas brancas → $2B$
- 1 bola cinza → C

Total do lado esquerdo:

$$2B + C$$

No **lado direito**, temos:

- 1 bola branca → B
- 3 bolas cinzas → 3C

Total do lado direito:

$$B + 3C$$

Como os dois lados estão equilibrados, temos:

$$2B + C = B + 3C$$

Subtraindo B de ambos os lados:

$$B + C = 3C$$

Subtraindo C de ambos os lados:

$$B = 2C$$

Conclusão: O peso de uma bola branca é o dobro do peso de uma bola cinza.

Problema 04 (A)

O problema trata do percurso (ou perímetro) de um carrinho que se desloca ao longo de uma trajetória composta por segmentos de reta unidos por giros de 90°, formando uma linha poligonal fechada, conforme mostra a figura. O carrinho parte do ponto A e retorna a esse mesmo ponto após percorrer os trechos indicados (as medidas dos segmentos de reta colaboram para que, ao fim do circuito, o carrinho retorne ao ponto A).

Observa-se que os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{GF}$ e $\overline{ED}$, embora não contenham medidas explicitadas na imagem, justapostos formam um segmento de medida igual a $\overline{BC} = 30$ cm. Portanto:

$$\overline{AH} + \overline{GF} + \overline{ED} = 30 \text{ cm}$$

Além disso, os quatro segmentos horizontais (AB, CD, FE e HG) medem 30 cm cada, e os dois segmentos verticais internos (EF e GH) medem 20 cm cada.

Assim, a distância total percorrida pelo carrinho é:

$4 \times 30 + 2 \times 20 = 160$ cm.

Problema 05 (E)

Com a nova receita, Pedro precisará de 20% a mais de farinha por unidade de pão. Isso significa que, em vez de usar 2,5 kg para fazer 30 pães, ele utilizará:

$$2{,}5 \times 1{,}2 = 3 \text{ kg}$$

Portanto, com 3 kg de farinha ele produz 30 pães segundo a nova receita. Como Pedro pretende fazer 36 pães, basta calcular proporcionalmente:

- Se 30 pães exigem 3 kg, então 6 pães exigem 0,6 kg.
- Logo, 36 pães, ou seja, 6 grupos de 6 pães cada, exigem:

$$6 \times 0{,}6 = 3{,}6 \text{ kg}$$

Assim, Pedro precisará de 3,6 kg de farinha para produzir os 36 pães com a nova receita.

Problema 06 (C)

Sejam a e b os algarismos do número $N = \overline{ab}$, ou seja, o número original é $10a + b$.

Inserir um zero entre os algarismos forma o número $N' = \overline{a0b}$, ou seja, o número $100a + b$.

A igualdade fica:

$$100a + b = 9(10a + b) \Rightarrow 5a = 4b$$

Isso significa que $a = 4$ e $b = 5$, ou seja, $10a + b = 45$.

Problema 07 (C)

Observe que $\frac{(5x+2)^2}{x^2} = \left(5 + \frac{2}{x}\right)^2$.

Portanto, a igualdade $\frac{(5x+2)^2}{x^2} = 1$ pode ser reescrita como:

$$\left(5 + \frac{2}{x}\right)^2 = 1$$

Isso significa que a equação $\frac{(5x+2)^2}{x^2} = 1$ tem solução desde que $5 + \frac{2}{x} = 1$ ou $5 + \frac{2}{x} = -1$.

Resolvendo cada equação de grau 1, agora construída, obtemos $x = -\frac{1}{3}$, na primeira, e $x = -\frac{1}{2}$ na segunda igualdade.

O maior dos números reais $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{2}$, é $x = -\frac{1}{3}$.

Solução Alternativa.

Multiplicamos ambos os lados da equação original $\frac{(5x+2)^2}{x^2} = 1$ por x^2 $(x \neq 0)$:

$$(5x+2)^2 = x^2$$

Desenvolvemos o quadrado e rearranjamos os termos da equação:

$$25x^2 + 20x + 4 = x^2 \Leftrightarrow 24x^2 + 20x + 4 = 0$$

Simplificamos a equação:

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2 \cdot 6}$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

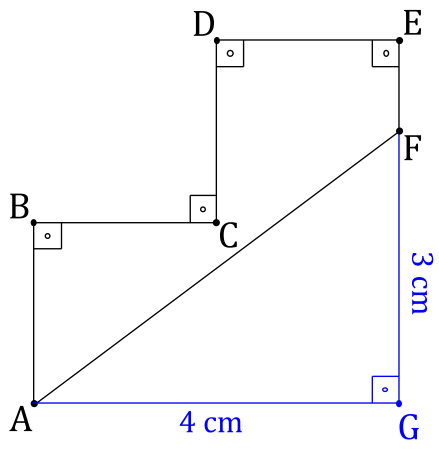
Observemos que:

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} > -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a maior raiz real da equação $\frac{(5x+2)^2}{x^2} = 1$ é $-\frac{1}{3}$.

Problema 08 (C)

Tomamos o ponto G como sendo a interseção entre a reta que passa por $\overline{EF}$ e a reta que passa pelo ponto A e é paralela a $\overline{BC}$. É fácil notar que $\overline{AG} = \overline{BC} + \overline{DE} = 4\ cm$ e $\overline{GF} = \overline{AB} + {\overline{CD}}/{2} = 3\ cm$.



Temos que o triângulo AFG é retângulo em G e assim pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AF}^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AF} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AF} = 5\ cm.$$

Portanto, a medida do segmento $\overline{AF}$ é de 5 centímetros.

Problema 09 (D)

Para formar números de 5 algarismos com exatamente dois algarismos "3" separados por um único algarismo par (2 ou 4), devemos considerar todas as posições possíveis em que isso pode acontecer.

Os dois algarismos "3" precisam estar com um único dígito entre eles, o que permite três formatos ao longo do número: os "3" podem estar nas posições 1ª e 3ª, 2ª e 4ª, ou 3ª e 5ª. Portanto, existem 3 posições possíveis para essa configuração.

Entre os dois "3", o algarismo central (o separador) deve ser um algarismo par, ou seja, pode ser 2 ou 4 — temos assim 2 opções para esse dígito.

As duas posições restantes (ainda livres no número) podem ser preenchidas com quaisquer dos outros algarismos disponíveis (1, 2, 4 ou 5), exceto o 3, já que ele só pode aparecer duas vezes no total.

Como a repetição é permitida entre os dígitos não-3, há 4 opções para cada uma dessas duas posições, totalizando,

$$4 \times 4 = 16 \text{ possibilidades.}$$

Assim, para cada uma das 3 posições possíveis dos "3", temos $2 \times 16 = 32$ números válidos.

Portanto, o total de números que R-2 pode formar é:

$$3 \times 32 = 96$$

Problema 10 (B)

O número de edições disputadas é uma **invariante** em relação aos três tipos de resultado. Portanto, para determinar o total de campeonatos do período considerado, basta somar as alturas das barras referentes a um mesmo clube.

Por exemplo, tomando o primeiro clube apresentado no gráfico (da esquerda para a direita - River), tem-se: $32 + 18 + 58 = 108$ campeonatos de primeira divisão até o ano de 2024.

Problema 11 (D)

Temos que ABE é triângulo retângulo em E com catetos medindo 10 cm e 5 cm. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{BE}^2 = 10^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{BE} = \sqrt{125} \Leftrightarrow \overline{BE} = 5\sqrt{5}$.

Observe que os ângulos $\angle CBF$ e $\angle ABE$ são complementares, assim, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo $\angle BCF$ é congruente ao ângulo $\angle ABE$ e o ângulo $\angle CBF$ é congruente ao ângulo $\angle AEB$. Com isso, pelo caso de semelhança de triângulos AA (Ângulo-Ângulo), os triângulos ABE e BCF são semelhantes. Estabelecendo uma proporção com os lados destes triângulos, temos:

$$\frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{10}{\overline{CF}} \Leftrightarrow \overline{CF} = 4\sqrt{5}\ cm$$

e

$$\frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{5}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \overline{BF} = 2\sqrt{5}\ cm$$

A área do quadrado ABCD é dada $10^2 = 100\ cm^2$, a área do triângulo ABE é dada por $\frac{10 \cdot 5}{2} = 25\ cm^2$ e a área do triângulo BCF é dada por $\frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 20\ cm^2$.

Logo a área do quadrilátero CDEF é dada por $100 - 25 - 20 = 55\ cm^2$.

Problema 12 (A)

A média dos cinco pesos é 8 kg, portanto, a soma total dos pesos é igual a: $5 \times 8 = 40$ kg.

Sabendo que o maior peso é 14 kg, queremos encontrar o maior valor possível para o menor peso, com a condição de que todos os pesos são inteiros e distintos.

Para maximizar o menor peso, precisamos minimizar a soma dos três pesos intermediários, distintos entre si e distintos do menor e do maior. Para isso, devemos buscar a situação em que os três pesos intermediários se coloquem em ordem crescente de pesos, formando uma sequência com a menor soma possível.

Seja o conjunto dos pesos:

$$x, a, b, c, 14 \text{ com } x < a < b < c < 14$$

Queremos maximizar x e minimizar $a + b + c$, sabendo que:

$$x + a + b + c + 14 = 40 \Rightarrow x + (a + b + c) = 26$$

Afirmamos que a menor soma possível para $(a + b + c)$ com inteiros distintos é 21, e $x = 5;$ *isso implica em* $a = 6, b = 7$ e $c = 8$.

Ora, se quisermos $x = 6 \Rightarrow (a + b + c) = 20$, teremos a, b e c com os pesos 7, 8 e 9, respectivamente, cuja soma é igual a $24 > 21$.

Solução Alternativa

Os pesos são x, a, b e c, com $x + a + b + c = 26$.

Como queremos minimizar $a + b + c$ e maximizar x, sabendo que,

$$x < a < b < c,$$

tomemos os números inteiros,

$$x, k + 1, k + 2, k + 3; \text{ onde,}$$

$$x \leq k, a = k + 1, b = k + 2 \text{ e } c = k + 3.$$

Observe que tomar valores consecutivos a partir de a, minimiza a soma $a + b + c$.

Logo,

$$x + a + b + c = 26$$

$$\Leftrightarrow x + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) = 26$$

$$\Leftrightarrow x + 3k = 20$$

Como $x \leq k$, teremos que $x + 3x \leq x + 3k = 20$. Ou seja,

$$x + 3x \leq 20 \Longrightarrow x \leq 5$$

Daí, a certeza de que $x = 5$ é o peso máximo inferior, entre os cinco valores, com as condições estabelecidas pelo problema.

Problema 13 (E)

Para garantir que uma bola preta caia, mesmo no pior cenário possível, é necessário considerar a sequência de extrações em que todas as bolas não pretas (brancas ou cinzas) sejam eliminadas antes que qualquer bola preta chegue à posição inferior de um compartimento.

Analisando a figura:

- No primeiro compartimento, há uma bola branca abaixo de uma preta → pode cair 1 bola não preta.
- No segundo, há duas bolas não pretas (branca e cinza) abaixo da preta → podem cair 2.
- No terceiro, há uma bola cinza abaixo da preta → 1.
- No quarto, a primeira bola já é preta → nenhuma.
- No quinto, há uma bola cinza abaixo da preta → 1.
- No sexto, a bola inferior já é preta → nenhuma.

Somando os possíveis descartes de bolas não pretas antes que qualquer preta se torne disponível:

$$1 + 2 + 1 + 0 + 1 + 0 = 5$$

Portanto, após 5 toques no botão, no pior cenário, todas as bolas não pretas que estavam abaixo das pretas terão caído. Assim, no 6º toque, qualquer bola que cair será preta.

Problema 14 (A)

A tentativa (4) elimina os dígitos 1, 7 e 8 da combinação. Logo, pela tentativa (1), garantimos que o dígito 2 pertence à combinação na posição intermediária: X – 2 – Y.

Da tentativa (3) 4 – 9 – 7 (*Dois dígitos corretos, mas mal posicionados*), concluímos que os dígitos 4 e 9 são os outros dois dígitos da combinação. E, se o dígito 4 não está bem-posicionado, teremos o dígito 9 no primeiro extremo e o 4 no último. Concluímos, portanto, que a combinação correta é: 9 – 2 – 4.

Problema 15 (A)

Seja x a medida do segmento $\overline{CD}$.

De (1), $\overline{CD} = n \cdot u'$ e de (2), $u = m \cdot u' \Rightarrow u' = \frac{u}{m}$. Portanto, temos que $x = n \cdot u' = n \cdot \frac{u}{m} = \frac{n}{m} \cdot u$.

Problema 16 (B)

Seja α a medida do ângulo $\angle ACB$. Como o triângulo ABC é isóscele com $AB = AC$, então $\angle ABC = \alpha$.

O triângulo BCD também é isósceles com $BD = BC$, e como $\angle D = \alpha$, os ângulos da base do triângulo DAB medem $\frac{\alpha}{2}$ cada, pois $\angle D$ é um ângulo externo desse triângulo.

Assim, os ângulos internos do triângulo ABC são:

- $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$
- $\angle ABC = \alpha$
- $\angle ACB = \alpha$

Somando:

$$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180 \Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 72°$$

No triângulo retângulo CDH, temos:

$$x + \alpha = 90° \Leftrightarrow x + 72° = 90° \Leftrightarrow x = 18°$$

Problema 17 (D)

Sofia vence quando o número sorteado tem quantidade ímpar de divisores, pois assim ela será a última a jogar. Um número só tem quantidade ímpar de divisores quando é um quadrado perfeito**.**

Entre os números de 1 a 100, os quadrados perfeitos são: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Logo, há 10 casos favoráveis e entre 100 possíveis.

Chance de Sofia ganhar na primeira: $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Problema 18 (D)

Queremos determinar o menor número de moedas numeradas de 1 a 6, com pelo menos uma de cada número, tal que qualquer par escolhido tenha outro par distinto com a mesma soma.

O conjunto de possíveis somas de dois números entre 1 e 6 vai de:

$$1 + 1 = 2 \text{ até } 6 + 6 = 12$$

Para cada uma dessas 11 somas (de 2 a 12), deve haver ao menos dois pares de moedas distintos que resultem nessa soma.

Analisemos os extremos:

- A única forma de obter a soma 2 é com (1,1)
- A única forma de obter a soma 12 é com (6,6)
  *Para que haja dois pares distintos com soma 2, é necessário ter quatro moedas de valor 1.

  **Para a soma igual a 12, precisamos de quatro moedas de valor 6.

O mesmo raciocínio vale para a soma 11: ela só ocorre com o par (5,6).

Precisamos de duas moedas com 5 e duas com 6 para garantir dois pares 5+6.

Fazendo essa análise para todas as somas de 2 a 12 e minimizando a quantidade de moedas, encontramos o seguinte conjunto mínimo que satisfaz a condição:

$$\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6\}$$

Esse conjunto possui 14 moedas e cobre, com no mínimo dois pares distintos, todas as somas possíveis de 2 a 12.

Problema 19 (C)

Como $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{AC}$, temos: $\widehat{D} \cong \hat{A}$ e $\hat{E} \cong \hat{C}$, que são ângulos correspondentes. Logo, pelo caso AA os triângulos BED e ABC são semelhantes. Assim, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BD}}{3} = \frac{x}{9} \Rightarrow \mathrm{BD} = \frac{x}{3}$$

Logo, temos que o $\overline{AD}$ mede $3 - \frac{x}{3}$ e a área $A(x)$ do quadrilátero $ADEF$, em função x, é dada por:

$$A(x) = x \cdot \left(3 - \frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow A(x) = 3x - \frac{x^2}{3}$$

A representação gráfica da função $A(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois a < 0, com zeros (0, 0) e (9, 0) e vértice (4.5, 6.75).

Portanto, o gráfico que melhor representa a variação da área $A(x)$ do quadrilátero $ADEF$ em função da medida x está na alternativa C.

Problema 20 (E)

Sem considerar a restrição imposta, o número total de maneiras de pintar o muro é dado por:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

Agora, precisamos subtrair desse total as configurações que violam a condição, ou seja, aquelas em que existe alguma sequência de três faixas consecutivas sem a cor azul.

Denotando por **A** a cor azul, e por **N** qualquer cor não-azul (vermelha ou branca), queremos eliminar as sequências do tipo:

(1) NNN___ ___ (trinca nas três primeiras faixas)

(2) ___NNN___ (trinca no meio)

(3) ___ ___ NNN (trinca nas três últimas faixas)

Tipo (1):

Sequências da forma **NNN__**.
Como há duas opções para cada N (vermelho ou branco), e três faixas seguintes com 3 cores possíveis, temos:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72 \text{ maneiras}$$

Tipo (2):

Sequências da forma **ANNN_** — aqui a primeira faixa **deve ser azul** para evitar sobreposição com o tipo (1). As demais seguem com duas cores (N) e depois uma cor qualquer:

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24 \text{ maneiras}$$

Tipo (3):

Trinca de N no final. Devemos cuidar para não contar novamente casos já considerados. Dividimos em dois subcasos:

- NANNN:

$$2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ maneiras}$$

- AANNN:

$$1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ maneiras.}$$

Total de casos do tipo (3): $16 + 8 = 24$ maneiras.

Logo, o número de maneiras **válidas** de pintar o muro, respeitando a condição de que nenhuma trinca consecutiva seja composta apenas por cores não-azuis, é:

$$243 - 72 - 24 - 24 = 123 \text{ maneiras.}$$