



TME²

3º TORNEIO DE MATEMÁTICA
DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

PI
2ª Fase
Ensino Médio

RESOLUÇÃO COMENTADA (2ª Fase)

REALIZAÇÃO:



**ACELERA
SEDUC**

SECRETARIA
DA EDUCAÇÃO - SEDUC

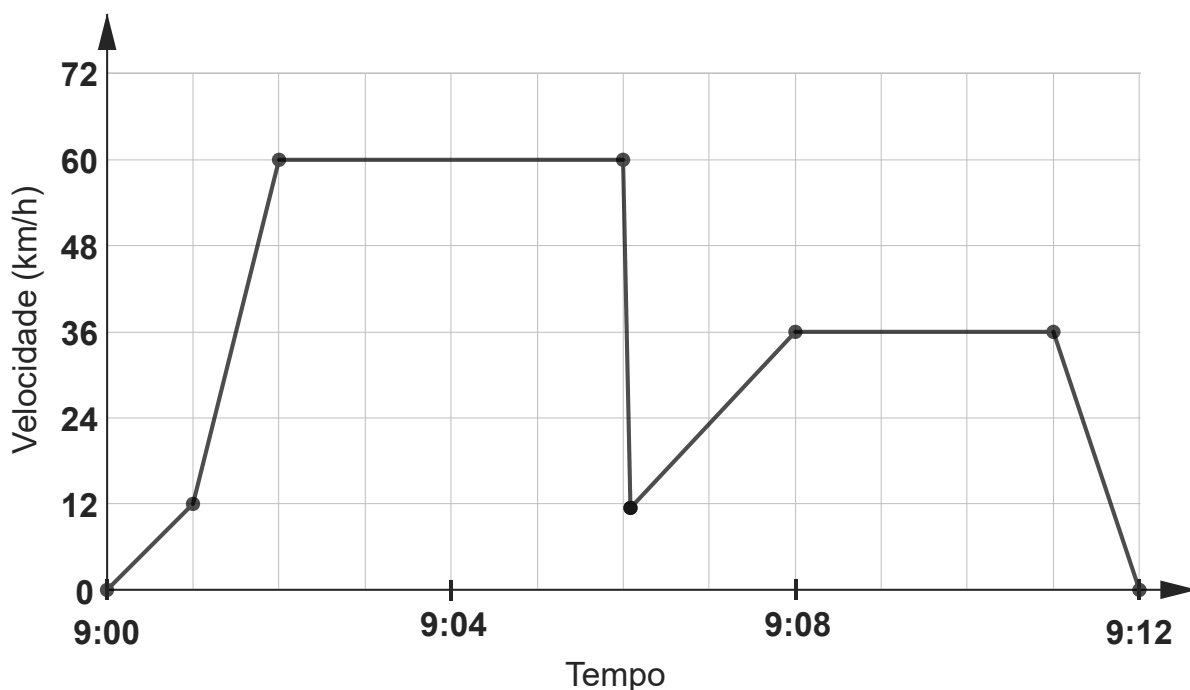


GOVERNO DO
PIAUI
AQUI TEM TRABALHO.
AQUI TEM FUTURO.

Problema 1*

Kelly foi dar uma volta em seu carro. Durante a viagem, um gato correu na frente do carro. Kelly pisou no freio e evitou acidentar o gato. Um pouco abalada, Kelly decidiu voltar para casa.

O gráfico abaixo é um registro simplificado da velocidade do carro durante a viagem.



*Questão extraída de OCDDE. Pisa released itens.

(a) Qual foi a velocidade máxima do carro durante a viagem?

O veículo manteve velocidade máxima constante, igual a 60 km/h, a partir do tempo 9:02 até o instante aproximado de 9:06.

(b) Que horas eram, aproximadamente, quando Kelly pisou no freio para evitar o gato?

De acordo com o gráfico, o horário em que Kelly pisou no freio está representado pela queda brusca e acentuada da velocidade, ou seja, por volta das 9:06.

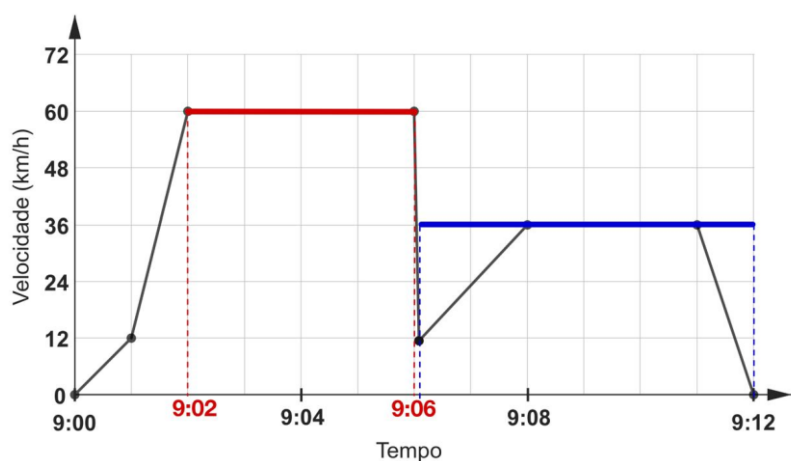
(c) O caminho que Kelly percorreu para voltar para casa foi mais curto do que a distância que ela percorreu de casa ao local onde ocorreu o incidente com o gato? Dê uma explicação para apoiar sua resposta, usando as informações fornecidas no gráfico.

Aqui, usamos o fato de que se a velocidade de um carro (em km/h) é constante em um intervalo de tempo (em hora), então a distância percorrida nesse intervalo é dada pelo produto entre a velocidade e o tempo percorrido.

Veja que das 9:02 às 9:06 a velocidade era constante e igual a 60 km/h, então, se considerarmos apenas essa parte do trajeto de ida, foram percorridos, nesse intervalo de 4 minutos (que equivale a $\frac{4}{60}$ hora) um total de $60 \cdot \frac{4}{60} = 4$ km. Obviamente, a distância percorrida em todo o trajeto de ida foi maior que 4 km, uma vez que ainda teve o trajeto percorrido onde a velocidade não era constante.

No caminho de volta, a velocidade máxima percorrida foi de 36 km/h, dessa forma, se considerarmos que ela usou 6 minutos (que equivale a $\frac{6}{60}$ hora) na volta para casa, a distância total percorrida terá sido de $36 \cdot \frac{6}{60} = 3,6$ km. Aqui é importante destacar que a distância percorrida na volta é menor que esses 3,6 km, uma vez que teve alguns trechos em que a velocidade foi menor que 36 km/h e, além disso, ela levou um pouquinho menos que 6 minutos na volta.

Logo, a distância percorrida na ida é maior que 4 km, enquanto a da volta é menor que 3,6 km, ou seja, o caminho que Kelly percorreu para voltar para casa foi mais curto do que a distância que ela percorreu de casa ao local onde ocorreu o incidente com o gato.



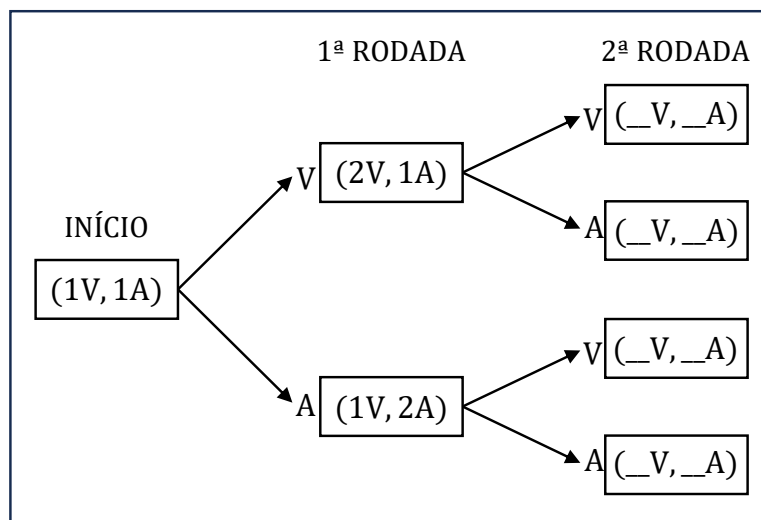
Problema 2

Considere o seguinte experimento: uma urna contém inicialmente 1 bola vermelha e 1 bola azul, distintas apenas pela cor. A cada rodada, realiza-se o procedimento:

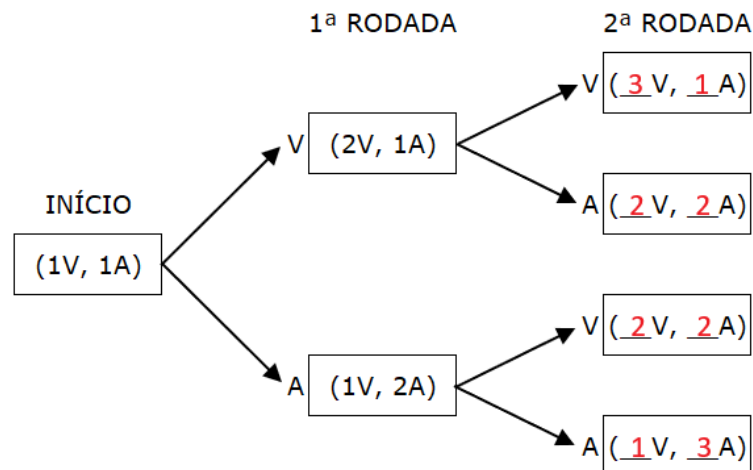
- Sorteia-se uma bola aleatoriamente da urna;
- Observa-se a cor da bola;
- A bola é devolvida à urna, junto com mais uma bola da mesma cor.

Por exemplo, se no início do jogo (primeira rodada), a bola azul é a sorteada, para a segunda rodada a urna terá 3 bolas: 1 vermelha e 2 azuis.

(a) Complete o diagrama indicando, em cada caso, como ficará a composição da urna — quantidade de bolas vermelhas (V) e azuis (A) — ao final da segunda rodada.



Resposta:



(b) Justifique por que, encerrada a terceira rodada, não é possível que a urna esteja com quantidades iguais de bolas da mesma cor.

De uma rodada para a rodada seguinte a quantidade de bolas na urna aumenta em uma unidade. Ao final da segunda rodada existem 4 bolas na urna, então ao final da terceira rodada existem 5 bolas. Como 5 é ímpar, é impossível que a quantidade de bolas azuis seja igual a quantidade de bolas vermelhas.

(c) Em um dado momento do experimento, o número de bolas azuis é o dobro do número de bolas vermelhas (isso poderia ocorrer, por exemplo, ao fim da primeira rodada). Quais outras rodadas são possíveis ocorrer novamente?

Solução 1:

Se o número de bolas azuis é igual ao dobro do número de bolas vermelhas, então a quantidade de bolas deve ser um múltiplo de 3. Como isso é possível de ocorrer na 1ª rodada (3 bolas na urna), então a próxima rodada será aquela em que, ao final terá 6 bolas na urna, ou seja, a 4ª rodada, depois a 7ª rodada, depois a 10ª rodada, e assim por diante, sempre de 3 em 3.

Solução 2:

Seja V o número de bolas vermelhas e A o número de bolas azuis. Sabemos que:

- O experimento começa com 1 bola vermelha e 1 azul.
- A cada rodada, uma nova bola é adicionada, da mesma cor que a sorteada.
- Assim, após n rodadas, o número total de bolas será: $V + A = 2 + n$.
- A condição dada é: $A = 2V$.

Logo,

$$V + 2V = 2 + n \Rightarrow 3V = 2 + n \Rightarrow V = \frac{2 + n}{3}$$

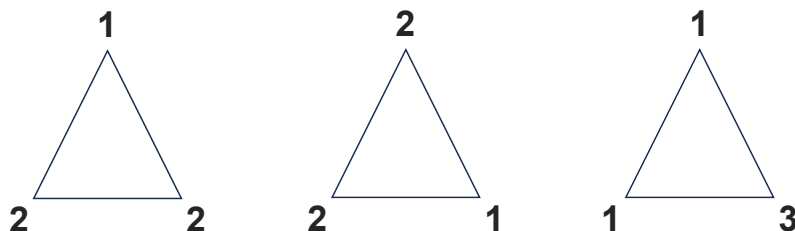
Para que V seja um número inteiro positivo, o numerador $2 + n$ precisa ser múltiplo de 3. Essa condição ocorre sempre que o número de rodadas for da forma $n = 3k + 1$, para k inteiro não negativo. Isto é, nas rodadas 1, 4, 7, 10, 13, ...

Problema 3

Em cada vértice de um polígono regular, deseja-se escrever um número inteiro positivo. Esses números devem satisfazer a seguinte condição:

A soma de cada número com os seus dois vizinhos imediatos (um de cada lado) deve ser sempre igual a um mesmo valor (constante).

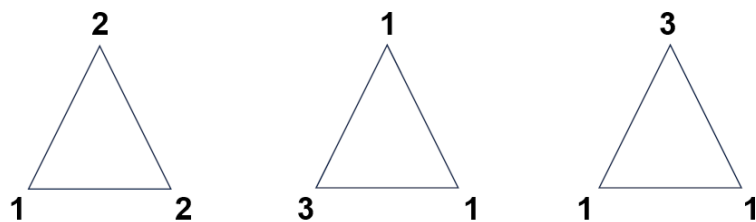
(a) Beatriz usou um triângulo. Ela fez tal procedimento de modo que a constante fosse igual a 5. Abaixo, estão alguns exemplos de triângulos já preenchidos corretamente.



Desenhe três outras maneiras distintas de preencher os vértices com inteiros positivos cuja soma local (cada número com os dois vizinhos) seja igual a 5.

Observação: o polígono não sofre rotações.

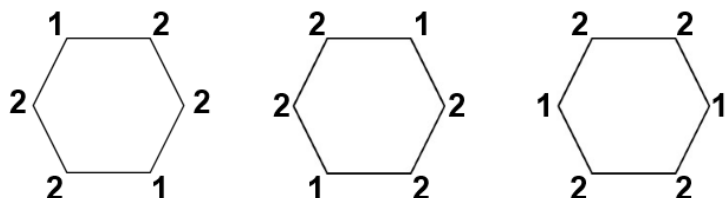
Resposta:



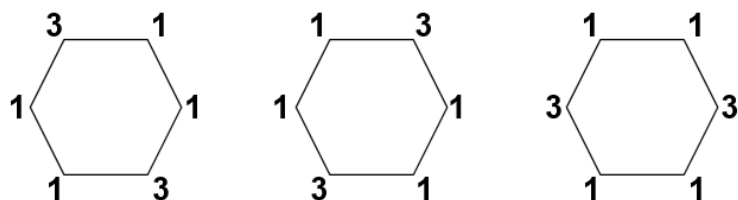
(b) Agora, Beatriz usou um hexágono. Ela deseja preenchê-lo de modo que a constante ainda seja igual a 5.

Quantos hexágonos diferentes existem? Ou seja, quantas maneiras distintas existem de preencher os seis vértices do hexágono A, B, C, D, E e F, com inteiros positivos, de modo que a soma de cada número com seus dois vizinhos imediatos seja sempre igual a 5?

Para que a constante seja 5, os números em três vértices consecutivos devem ser 1, 2, 2 ou 3, 1, 1, como no item anterior. No primeiro caso, temos as seguintes possibilidades de preenchimento:



No segundo caso, temos as seguintes possibilidades de preenchimento:



Logo, são exatamente 6 hexágonos.

Uma outra maneira de pensar seria observar que, uma vez escolhida uma terna ordenada de inteiros positivos (a, b, c) tal que $a + b + c = 5$, os vértices do hexágono ficam determinados de maneira única.

Com isso, obtemos $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$ e $(3, 1, 1)$ como todas as ternas de números inteiros positivos que satisfazem a condição e, portanto, preenchem o hexágono.

(c) E se o polígono tiver 12 lados e a constante for igual a 20? Quantas maneiras distintas existem de preencher os vértices com inteiros positivos que satisfaçam a condição?

Solução 1:

Idêntico ao item (b), sejam a , b e c números inteiros positivos que ocupam vértices consecutivos. Uma terna ordenada (a, b, c) tal que $a + b + c = 20$ determina uma maneira única de preencher os vértices do dodecágono regular. Ou seja, das igualdades $a_1 + a_2 + a_3 = 20$ e $a_2 + a_3 + a_4 = 20$ segue $a_4 = a_1$; depois $a_5 = a_2$, $a_6 = a_3$, ..., logo o padrão se repete: $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c)$.

Com isso, contemos a quantidade de ternas de inteiros positivos com tal condição.

Se $a = 18$, necessariamente $(b, c) = (1, 1)$: **1 possibilidade**;

Se $a = 17$, então $(b, c) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$: **2 possibilidades**;

Se $a = 16$, então $(b, c) = (1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$: **3 possibilidades**;

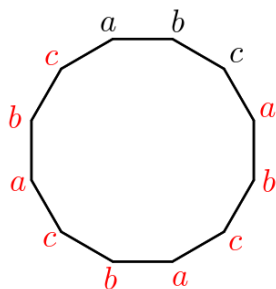
Seguindo dessa forma, vemos que com $a = 3$ há **16 possibilidades**, com $a = 2$ há **17 possibilidades**, e com $a = 1$, há **18 possibilidades**.

A quantidade total de ternas ordenadas é $1 + 2 + 3 + \dots + 17 + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$.

Portanto, existem 171 preenchimentos (com vértices rotulados) para o dodecágono em que a soma de três vértices consecutivos é 20; cada um corresponde a escolher uma terna ordenada (a, b, c) de inteiros positivos com $a + b + c = 20$, repetida ao longo do polígono como $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c)$.

Solução 2:

Observe que quando colocamos os números em três vértices consecutivos, automaticamente fica definido o preenchimento dos demais vértices do polígono. Assim, precisamos apenas encontrar o total de ternas ordenadas (a, b, c) , tais que a, b e c são inteiros positivos e $a + b + c = 20$.



Como $a, b, c \geq 1$, podemos fazer $a = x + 1$, $b = y + 1$ e $c = z + 1$, onde $x + y + z = 17$.

O total de soluções dessa equação é igual ao total de maneiras de organizarmos, em sequência, 17 traços “|” e 2 sinais de adição “+”. Por exemplo, a sequência

|||||++|||||||

em que indica $x = 5$, $y = 0$ e $z = 12$, consequentemente, $a = 6$, $b = 1$ e $c = 13$.

Portanto, o total de soluções de $x + y + z = 17$ é calculado como a quantidade de formas diferentes de organizar em uma fila, do tipo indiana, 19 objetos: 17 traços “|” e 2 sinais de adição “+”.

O resultado é conhecido como o número de permutações com elementos repetidos ($P_{19}^{(17,2)}$), a saber, o número de permutações feitas com 19 objetos, em que 17 são de um tipo e 2 são de outro tipo.

$$P_{19}^{(17,2)} = \frac{19!}{17! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 18}{2} = 171.$$

Logo, existem 171 maneiras distintas de preencher os vértices do polígono.

Solução 3:

É fato clássico que o número de soluções em inteiros positivos de

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n$$

é

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Ou seja, disponha n “estrelas” em fila e escolha $k-1$ posições de “barras” entre as $n-1$ lacunas para separar as parcelas. Cada escolha determina única solução, e vice-versa.

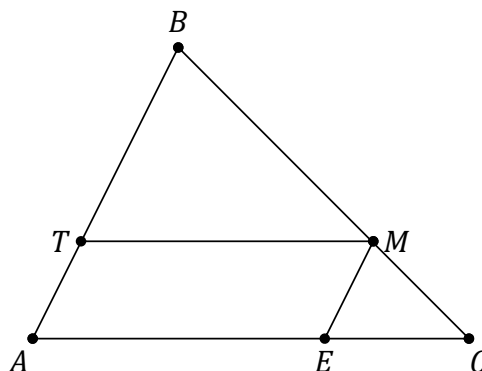
No caso do polígono de 12 vértices, e soma 20, temos $k = 3$ e $n = 20$, logo

$$\binom{20-1}{3-1} = \binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{2} = 171$$

Portanto, existem 171 preenchimentos (com vértices rotulados).

Problema 4

Na figura, considere o triângulo ABC e o paralelogramo $TMEA$, com $T \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$ e $E \in \overline{AC}$. Considere que $\mathcal{A}(ABC)$ representa a área do triângulo ABC .



(a) Justifique que os triângulos BTM , BAC e MEC são semelhantes.

Como o quadrilátero $TMEA$ é um paralelogramo, temos que $\overline{TM}$ é paralelo a $\overline{AE}$ e $\overline{TE}$ é paralelo a $\overline{ME}$.

- Assim, o ângulo $\widehat{BAC}$ é igual ao ângulo $\widehat{BTM}$ e ao ângulo $\widehat{MEC}$.
- Além disso, o ângulo $\widehat{BMT}$ é igual ao ângulo $\widehat{BCA}$.

Com isso, percebemos que os triângulos BTM , BAC e MEC possuem dois ângulos iguais. Como dois pares de ângulos correspondentes iguais garantem a semelhança de triângulos, concluímos que

$$\Delta BTM \sim \Delta BAC \sim \Delta MEC$$

(b) Demonstre que $\sqrt{\mathcal{A}(ABC)} = \sqrt{\mathcal{A}(BTM)} + \sqrt{\mathcal{A}(MEC)}$. Ou seja, explique por que a igualdade é verdadeira.

Pelo item (a), os triângulos BTM , BAC e MEC são semelhantes.

Sejam $a = AE$ e $b = EC$ (logo, $AC = a + b$).

Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Com isso, temos:

$$\frac{\mathcal{A}(BTM)}{\mathcal{A}(ABC)} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2, \quad \frac{\mathcal{A}(MEC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

Ou, equivalentemente,

$$\sqrt{\mathcal{A}(BTM)} = \sqrt{\mathcal{A}(ABC)} \cdot \frac{a}{a+b}, \quad \sqrt{\mathcal{A}(MEC)} = \sqrt{\mathcal{A}(ABC)} \cdot \frac{b}{a+b}$$

Somando as duas igualdades:

$$\sqrt{\mathcal{A}(BTM)} + \sqrt{\mathcal{A}(MEC)} = \sqrt{\mathcal{A}(ABC)} \cdot \frac{a+b}{a+b} = \sqrt{\mathcal{A}(ABC)}$$

Logo,

$$\sqrt{\mathcal{A}(ABC)} = \sqrt{\mathcal{A}(BTM)} + \sqrt{\mathcal{A}(MEC)}$$

Problema 5

Em 2011, a OBMEP denominou como *múltiplo irado* de n o menor dos múltiplos de n que possa ser escrito empregando-se apenas os algarismos 0 e 1.

Por exemplo, o irado de 3 é o 111, já o irado de 7 é o 1001.

(a) O número 10 é irado de si mesmo e de mais outros dois números inteiros positivos. Quais são esses outros dois números?

Múltiplos positivos de 2: 2, 4, 6, 8, 10,

Múltiplos positivos de 5: 5, 10, ...

Portanto, 10 é múltiplo irado de 2 e 5.

(b) Usamos a sequência 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 para encontrar o *irado* do número 6. Os restos que cada termo dessa sequência deixa, ao ser dividido por 6, são, respectivamente: 1, 5, 3, 1, 5, 3.

A diferença $1111 - 1 = 1110$ (entre os dois primeiros termos da sequência que deixam o mesmo resto na divisão por 6) é divisível por 6 e contém apenas os dígitos 1 e 0. Além disso, 1110 é *múltiplo irado* de 6.

Encontre, usando a mesma estratégia, um múltiplo de 12 que contenha apenas os dígitos 1 e 0.

Os restos das divisões de 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, por 12, são 1, 11, 3, 7, 11, 3.

A diferença $11111 - 11 = 11100$ (entre os dois primeiros termos da sequência que deixam o mesmo resto na divisão por 12) é divisível por 12 e contém apenas os dígitos 1 e 0.

(c) Veja uma outra maneira de encontrar o *irado* de 6:

Os dois primeiros candidatos possíveis são 10 e 11. Como nenhum deles é múltiplo de 6, tentamos os seguintes: 100, 101, 110 e 111. Novamente, nenhum é múltiplo de 6. Continuamos com: 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 e 1111. Como 1110 é divisível por 6, ele é o *irado* de 6.

Encontre o *irado* de 13.

Os dois primeiros candidatos possíveis são 10 e 11. Como nenhum deles é múltiplo de 13, tentamos os seguintes: 100, 101, 110 e 111. Novamente, nenhum é múltiplo de 13. Continuamos com: 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 e 1111. Como 1001 é divisível por 13, ele é o múltiplo irado de 13.

(d) Prove que todo número inteiro positivo possui um múltiplo irado. Ou seja, justifique a afirmação de que: *Todo número inteiro positivo tem pelo menos um múltiplo que pode ser escrito utilizando apenas os algarismos 0 e 1.*

A demonstração dessa proposição dar-se-á simplesmente pela reconstituição do que foi feito no item (b). A demonstração fica completa ao justificarmos que o algoritmo praticado em (b) pode ser realizado para qualquer inteiro positivo; e isso é sempre verdade graças ao Princípio das Gavetas (ou das Casas dos Pombos).

Ora, consideremos a sequência 1, 11, 111, ... (até o termo com exatamente n algarismos iguais a 1) e o resto que cada termo deixa na divisão por n , inteiro positivo. O conjunto de todos os restos possíveis é $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Em algum momento dessa divisão o resto será igual a zero; se isso não ocorrer, haverá necessariamente dois termos com o mesmo resto — é exatamente o Princípio das Gavetas (ou da Casa dos Pombos).

(Analogia: em um pombal/columbário, se houver mais pombos do que caixas, pelo menos uma caixa conterá mais de um pombo.)

A diferença entre dois termos com o mesmo resto na divisão por n é um múltiplo de n ; em particular, esse número tem a forma $11...100...0$ (uma sequência de algarismos 1 seguida de uma sequência de zeros), portanto usa apenas 0 e 1. Logo, todo número inteiro positivo tem pelo menos um múltiplo com essa característica, isto é, possui um múltiplo irado.

A seguir, uma demonstração técnica e dentro do rigor da escrita matemática.

Seja n um número inteiro positivo qualquer. Vamos encontrar os restos das divisões de 1, 11, 111, 1111, 11111, ... por n . Seja k um inteiro positivo qualquer, tal que $k > n$. Como n é um número genérico e, portanto, desconhecido, denotamos por

n_1 o resto da divisão de 1 por n ;

n_2 o resto da divisão de 11 por n ;

n_3 o resto da divisão de 111 por n ;

n_4 o resto da divisão de 1111 por n ;

⋮

n_k o resto da divisão de $\underbrace{111 \dots 1}_{k \text{ vezes}}$ por n .

Lembre-se que $0 \leq n_1, n_2, n_3, \dots, n_k < n$. Assim, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem i e j , com $i < j$, tais que $n_i = n_j$, ou seja, $\underbrace{111 \dots 1}_{i \text{ vezes}}$ e $\underbrace{111 \dots 1}_{j \text{ vezes}}$ deixam o mesmo resto da divisão por n , o que implica que

$$\underbrace{111 \dots 1}_{j \text{ vezes}} - \underbrace{111 \dots 1}_{i \text{ vezes}} = \underbrace{11 \dots 1}_{j-i} \underbrace{00 \dots 0}_{i \text{ vezes}}$$

é divisível por n .

Já que todo número inteiro positivo n possui um múltiplo cujos algarismos são de apenas dois tipos, 0 ou 1, este pode ser o menor dos múltiplos de n com essa propriedade ou pode existir um outro ainda menor. Em qualquer dos casos, n sempre terá um múltiplo irado.